

SEMIGRUP- Γ INTRA-REGULAR DAN KETERKAITANNYA DENGAN BI-IDEAL, QUASI-IDEAL, SERTA IDEAL KANAN DAN KIRI

Meiliana Purwandani¹, YD Sumanto², Sunarsih³
^{1,2,3}Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Meiliana.lowla@yahoo.com
ydsumento@gmail.com

ABSTRACT. A Γ -semigroup is generalization from semigroup, which concepts in Γ -semigroup analogue with concepts in semigroup. It is called a Γ -semigroup if there is a mapping between two nonempty sets S and Γ , written as $(x, \gamma, y) \rightarrow x\gamma y$, such that $(x\gamma y)\beta z = x\gamma(y\beta z)$, for all $x, y \in S$ and $\gamma, \beta \in \Gamma$. A Γ -semigroup is said to be intra-regular if contains for all elements of intra regular, is if $a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, for all $x, y \in \Gamma$ and $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$. In this paper, discussed about intra-regular Γ -semigroup and the relation based on bi-ideals, quasi-ideals, and ideals right and left.

Keywords : Γ -semigroup, bi-ideals, quasi-ideals, ideals right, ideals left, intra-regular

I. PENDAHULUAN

Dalam perkembangan ilmu aljabar, banyak topik mengenai strukturaljabar yang telah dibahas dan mengalami perkembangan, salah satunya adalah semigrup. Salah satu pengembangan semigrup adalah semigrup- Γ . Konsep semigrup- Γ telah diperkenalkan oleh M.K. Sen pada tahun 1986 pada [3], sedangkan konsep mengenai intra-regular pada semigrup telah diperkenalkan oleh [8]. Dari dua konsep ini, kemudian [3] menuliskan tentang konsep intra-regular pada semigrup- Γ .

Selanjutnya dalam Tugas Akhir ini dibahas mengenai semigrup- Γ intra-regular secara umum dan keterkaitannya dengan bi-ideal, quasi-ideal, serta ideal kanan dan kiri.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Ideal pada Semigrup- Γ

Definisi 2.1 [3] Diberikan S adalah Semigrup- Γ . Himpunan bagian tak kosong I dari S disebut

- (i) Ideal kiri dari S asalkan $S\Gamma I \subseteq I$.
- (ii) Ideal kanan dari S asalkan $I\Gamma S \subseteq I$.
- (iii) Ideal dari S asalkan $S\Gamma I \subseteq I$ dan $I\Gamma S \subseteq I$.

2.2 Quasi-ideal pada Semigrup- Γ

Definisi 2.2 [3] Diberikan S adalah semigrup- Γ . Himpunan bagian tak kosong Q dari S disebut *quasi-ideal* dari S jika $Q\Gamma S \cap S\Gamma Q \subseteq Q$.

Teorema 2.3 [6] Diberikan semigrup- ΓS . Setiap ideal kiri, ideal kanan, dan ideal dari semigrup- ΓS merupakan *quasi-ideal* dari S .

2.3 Bi-ideal pada Semigrup- Γ

Definisi 2.4 [3] Diberikan S adalah Semigrup- Γ . Himpunan bagian tak kosong B dari S disebut *bi-ideal* dari S jika $B\Gamma S\Gamma B \subseteq B$.

Teorema 2.5 [6] Diberikan semigrup- ΓS . Setiap ideal kiri, ideal kanan, dan ideal dari semigrup- ΓS merupakan *bi-ideal* dari S .

Teorema 2.6 [2] Diberikan A merupakan ideal dari semigrup- ΓS dan Q merupakan *quasi-ideal* dari A , maka Q merupakan *bi-ideal*.

Bukti :

Diberikan semigrup- ΓS . Diketahui A adalah ideal dari semigrup- ΓS dan Q adalah *quasi-ideal* dari A . Dibuktikan Q adalah *bi-ideal* dari semigrup- ΓS .

Dari yang diketahui A adalah ideal dari semigrup- ΓS maka $A\Gamma S \subseteq A$ dan $S\Gamma A \subseteq A$, sedangkan $A \subseteq S$, dan Q adalah *quasi-ideal* dari A maka

$A\Gamma Q \cap Q\Gamma A \subseteq Q$, sedangkan $Q \subseteq A$. Ditunjukkan $Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq Q$. Oleh karena $A \subseteq S$ dan $Q \subseteq A$, maka $Q \subseteq A \subseteq S$. Selanjutnya,

$$Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq A\Gamma S\Gamma Q \subseteq A\Gamma Q$$

$$Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq Q\Gamma S\Gamma A \subseteq Q\Gamma A$$

$$Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq A\Gamma Q \cap Q\Gamma A \subseteq Q.$$

Diperoleh $Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq Q$, maka Q adalah *bi-ideal* dari semigrup- ΓS . ■

Akibat 2.7 [2] Setiap *quasi-ideal* dari semigrup- ΓS adalah *bi-ideal* dari S .

Bukti :

Diberikan semigrup- ΓS . Diketahui Q merupakan *quasi-ideal* dari S dan karena S ideal atas dirinya sendiri, dari Teorema 2.6 maka Q adalah *bi-ideal* dari S . ■

Lemma 2.8 Diberikan semigrup- ΓS . Misalkan $A, B, C \subseteq S$, maka berlaku sifat $(A \cup B)\Gamma C = A\Gamma C \cup B\Gamma C$.

Bukti :

Untuk membuktikan $(A \cup B)\Gamma C = A\Gamma C \cup B\Gamma C$, maka perlu ditunjukkan

$(A \cup B)\Gamma C \subseteq A\Gamma C \cup B\Gamma C$ dan $A\Gamma C \cup B\Gamma C \subseteq (A \cup B)\Gamma C$.

\Rightarrow Diambil sebarang $x \in (A \cup B)\Gamma C$ dengan $x = a\gamma c$.

Ditunjukkan $x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$. Dari yang diketahui $x \in (A \cup B)\Gamma C$, artinya

$x = a\gamma c$, untuk setiap $a \in A \cup B$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$.

$= a\gamma c$, untuk setiap $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$, atau $a \in B$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$.

Artinya $x \in A\Gamma C$ atau $x \in B\Gamma C$, ditulis $x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$.

Jadi, diperoleh untuk setiap $x \in (A \cup B)\Gamma C$, maka $x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$.

Terbuktibahwa $(A \cup B)\Gamma C \subseteq A\Gamma C \cup B\Gamma C \dots (1)$

\Leftarrow Diambil sebarang $x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$ dengan $x = a\gamma c$.

Ditunjukkan $x \in (A \cup B)\Gamma C$. Dari yang diketahui $x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$, artinya

$x \in A\Gamma C$ atau $x \in B\Gamma C$.

Jika $x \in A\Gamma C$, berarti $x = a\gamma c$, untuk $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$.

Jika $x \in B\Gamma C$, berarti $x = a\gamma c$, untuk $a \in B$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$.

Dari 2 kemungkinan tersebut, hal ini berarti $a \in A$ atau $a \in B$, atau ditulis $a \in A \cup B$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$. Jadi, diperoleh $x = a\gamma c \in (A \cup B)\Gamma C$.

Terbuktibahwa $A\Gamma C \cup B\Gamma C \subseteq (A \cup B)\Gamma C \dots (2)$

Dari (1) dan (2), maka terbukti bahwa $(A \cup B)\Gamma C = A\Gamma C \cup B\Gamma C$. ■

Teorema 2.9 [3] Misalkan S adalah semigrup- Γ dan $a \in S$, maka

- (i) $a \cup a\Gamma S$ merupakan ideal kanan dari S . Selanjutnya disebut ideal kanan yang dibangun oleh a , ditulis $R(a)$.
- (ii) $a \cup S\Gamma a$ merupakan ideal kiri dari S . Selanjutnya disebut ideal kiri yang dibangun oleh a , ditulis $L(a)$.
- (iii) $a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S$ merupakan ideal dari S . Selanjutnya disebut ideal yang dibangun oleh a , ditulis $I(a)$.
- (iv) $a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)$ merupakan quasi-ideal dari S . Selanjutnya disebut quasi-ideal yang dibangun oleh a , ditulis $Q(a)$.
- (v) $a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a$ merupakan bi-ideal dari S . Selanjutnya disebut bi-ideal yang dibangun oleh a , ditulis $B(a)$.

Bukti :

Diketahui S semigrup- Γ . Diambil sebarang $a \in S$.

- i. Dibuktikan $a \cup a\Gamma S$ merupakan ideal kanan dari semigrup- ΓS .

Ditunjukkan $(a \cup a\Gamma S)\Gamma S \subseteq a \cup a\Gamma S$.

$$\begin{aligned} (a \cup a\Gamma S)\Gamma S &\subseteq a\Gamma S \cup (a\Gamma S)\Gamma S && \text{,Lemma 2.8} \\ &= a\Gamma S \cup a\Gamma(S\Gamma S) && \text{,sifat asosiatif} \\ &\subseteq a\Gamma S \cup a\Gamma S = a\Gamma S && \text{,}S \text{ ideal} \\ &\subseteq a \cup a\Gamma S \end{aligned}$$

- ii. Dibuktikan $a \cup S\Gamma a$ merupakan ideal kiri dari semigrup- ΓS .

Ditunjukkan $S\Gamma(a \cup S\Gamma a) \subseteq a \cup S\Gamma a$

$$\begin{aligned} S\Gamma(a \cup S\Gamma a) &\subseteq S\Gamma a \cup S\Gamma(S\Gamma a) && \text{,Lemma 2.8} \\ &= S\Gamma a \cup (S\Gamma S)\Gamma a && \text{,sifat asosiatif} \\ &\subseteq S\Gamma a \cup S\Gamma a = S\Gamma a && \text{,}S \text{ ideal} \\ &\subseteq a \cup S\Gamma a \end{aligned}$$

- iii. Dibuktikan $a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S$ merupakan ideal dari semigrup- ΓS .

Ditunjukkan $(a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S)\Gamma S \subseteq a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S$ dan

$S\Gamma(a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S) \subseteq a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S$.

$$\begin{aligned} (a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S)\Gamma S &\subseteq a\Gamma S \cup (S\Gamma a)\Gamma S \cup (a\Gamma S)\Gamma S \cup (S\Gamma a\Gamma S)\Gamma S \\ &= a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S \cup a\Gamma(S\Gamma S) \cup S\Gamma a\Gamma(S\Gamma S) \\ &\subseteq a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S \\ &\subseteq a\Gamma S \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S = a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S \\ &\subseteq a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} S\Gamma(a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S) &\subseteq S\Gamma a \cup S\Gamma(S\Gamma a) \cup S\Gamma(a\Gamma S) \cup S\Gamma(S\Gamma a\Gamma S) \\ &= S\Gamma a \cup (S\Gamma S)\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S \cup (S\Gamma S)\Gamma a\Gamma S \\ &\subseteq S\Gamma a \cup S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S = S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S \end{aligned}$$

- iv. Dibuktikan $a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)$ merupakan quasi-ideal dari semigrup- ΓS .

Ditunjukkan

$$\begin{aligned} \{a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)\}\Gamma S \cap S\Gamma\{a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)\} &\subseteq a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a). \\ \{a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)\}\Gamma S \cap S\Gamma\{a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)\} \\ &\subseteq \{a\Gamma S \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)\Gamma S\} \cap \{S\Gamma a \cup S\Gamma(a\Gamma S \cap S\Gamma a)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq \{a\Gamma S \cup ((a\Gamma S)(\Gamma S) \cap (S\Gamma a)(\Gamma S))\} \cap \{S\Gamma a \cup ((S\Gamma)(a\Gamma S) \cap (S\Gamma)(S\Gamma a))\} \\
&= \{a\Gamma S \cup ((a\Gamma)(S\Gamma S) \cap S\Gamma a\Gamma S)\} \cap \{S\Gamma a \cup (S\Gamma a\Gamma S \cap (S\Gamma S)(\Gamma a))\} \\
&\subseteq \{a\Gamma S \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a\Gamma S)\} \cap \{S\Gamma a \cup (S\Gamma a\Gamma S \cap S\Gamma a)\} \\
&\subseteq \{(a\Gamma S \cup a\Gamma S) \cap (a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S)\} \cap \{(S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S) \cap (S\Gamma a \cup S\Gamma a)\} \\
&\subseteq (a\Gamma S \cap S\Gamma a\Gamma S) \cap (S\Gamma a\Gamma S \cap S\Gamma a) \\
&\subseteq (a\Gamma S \cap S\Gamma a) \\
&\subseteq a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)
\end{aligned}$$

v. Dibuktikan $a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a$ merupakan bi-ideal dari semigrup- ΓS .

Ditunjukkan

$$\begin{aligned}
&(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a) \subseteq a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a. \\
&(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a) \\
&= \{(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S\}\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a) \\
&\subseteq (a\Gamma S \cup (a\Gamma a)\Gamma S \cup (a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S)\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a) \\
&= (a\Gamma S \cup a\Gamma(a\Gamma S) \cup a\Gamma(S\Gamma a\Gamma S))\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a) \\
&\subseteq (a\Gamma S \cup a\Gamma S \cup a\Gamma S)\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a) \\
&= (a\Gamma S)\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a) \\
&\subseteq (a\Gamma S)\Gamma a \cup (a\Gamma S)\Gamma a\Gamma a \cup (a\Gamma S)\Gamma a\Gamma S\Gamma a \\
&= a\Gamma S\Gamma a \cup a\Gamma(S\Gamma a)\Gamma a \cup a\Gamma(S\Gamma a\Gamma S)\Gamma a \\
&\subseteq a\Gamma S\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a = a\Gamma S\Gamma a \\
&\subseteq a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a \blacksquare
\end{aligned}$$

2.4 Semigrup- Γ Intra-Regular

Definisi 2.10 [3] *Semigrup- Γ S disebut semigrup- Γ intra-regular jika $a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, untuk semua $a \in S$. Sedangkan a dikatakan sebagai elemen intra-regular jika $a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuk setiap $x, y \in S$ dan $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.*

Teorema 2.11 [3] *Diberikan S adalah semigrup- Γ , maka:*

- 1) *S merupakan semigrup- Γ intra-regular jika dan hanya jika untuk setiap bi-ideal B dan quasi-ideal Q dari S , sedemikian hingga $B \cap Q \subseteq S\Gamma B\Gamma Q\Gamma S$.*
- 2) *S merupakan semigrup- Γ intra-regular jika dan hanya jika untuk setiap bi-ideal B dan quasi-ideal Q dari S , sedemikian hingga $B \cap Q \subseteq S\Gamma Q\Gamma B\Gamma S$.*

Bukti :

1) Diberikan semigrup- ΓS .

\Rightarrow Diketahui S merupakan semigrup- Γ intra-regular. Diberikan sebarang B adalah bi-ideal dari S dan Q adalah quasi-ideal dari S .

Ditunjukkan $B \cap Q \subseteq S\Gamma B\Gamma Q\Gamma S$. Diambil sebarang $a \in B \cap Q$. Dari yang diketahui S merupakan semigrup- Γ intra-regular, maka $a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuk setiap $x, y \in S, \gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

$$\begin{aligned} a &= x\gamma a\gamma' a\gamma'' y \\ &= x\gamma a\gamma' (x\gamma a\gamma' a\gamma'' y)\gamma'' y \\ &= x\gamma (a\gamma' x\gamma a)\gamma' a\gamma'' y\gamma'' y \in S\Gamma B\Gamma Q\Gamma S. \end{aligned}$$

Diperoleh $B \cap Q \subseteq S\Gamma B\Gamma Q\Gamma S$.

\Leftarrow Diketahui $B \cap Q \subseteq S\Gamma B\Gamma Q\Gamma S$ untuk setiap B bi-ideal dari S dan Q quasi-ideal dari S . Dibuktikan S merupakan semigrup- Γ intra-regular.

Diambil sebarang $a \in S$. Ditunjukkan $a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, untuk setiap $a \in S$.

$$\begin{aligned} a &\in B(a) \cap Q(a) \\ &\subseteq S\Gamma B(a)\Gamma Q(a)\Gamma S && , S \text{ intra-regular} \\ &= S\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma(a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a))\Gamma S && , \text{Teorema 2.9} \\ &\subseteq (S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S\Gamma a)\Gamma(a \cup a\Gamma S)\Gamma S && , \text{Lemma 2.8} \\ &\subseteq S\Gamma a\Gamma(a \cup a\Gamma S)\Gamma S && , \text{definisi semigrup-}\Gamma \\ &\subseteq S\Gamma a\Gamma(a\Gamma S \cup a\Gamma S\Gamma S) && , \text{Lemma 2.8} \\ &\subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma a\Gamma S\Gamma S && , \text{Lemma 2.8} \\ &\subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S. \end{aligned}$$

Diperoleh $a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka S merupakan semigrup- Γ intra-regular.

2) Diberikan semigrup- ΓS .

\Rightarrow Diketahui S merupakan semigrup- Γ intra-regular. Diberikan sebarang B adalah bi-ideal dari S dan Q adalah quasi-ideal dari S .

Ditunjukkan $B \cap Q \subseteq S\Gamma Q\Gamma B\Gamma S$. Diambil sebarang $a \in B \cap Q$. Dari yang diketahui S merupakan semigrup- Γ intra-regular, maka $a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuk setiap $x, y \in S, \gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

$$\begin{aligned} a &= x\gamma a\gamma' a\gamma'' y \\ &= x\gamma (x\gamma a\gamma' a\gamma'' y)\gamma' a\gamma'' y \end{aligned}$$

$$= x\gamma x\gamma a\gamma' (a\gamma'' y\gamma' a)\gamma'' y \in S\Gamma Q\Gamma B\Gamma S.$$

Diperoleh $B \cap Q \subseteq S\Gamma Q\Gamma B\Gamma S$.

\Leftarrow Diketahui $B \cap Q \subseteq S\Gamma Q\Gamma B\Gamma S$ untuk setiap B bi-ideal dari S dan Q quasi-ideal dari S . Dibuktikan S merupakan semigrup- Γ intra-regular.

Diambilsebarang $a \in S$. Ditunjukkan $a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, untuk setiap $a \in S$.

$$\begin{aligned} a &\in B(a) \cap Q(a) \\ &\subseteq S\Gamma Q(a)\Gamma B(a)\Gamma S && ,S \text{ intra-regular} \\ &= S\Gamma(a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a))\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S && ,\text{Teorema 2.9} \\ &\subseteq S\Gamma(a \cup a\Gamma S)\Gamma(a\Gamma S \cup a\Gamma a\Gamma S \cup a\Gamma S\Gamma a\Gamma S), && \text{Lemma 2.8} \\ &\subseteq (S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S)\Gamma(a\Gamma S \cup a\Gamma a\Gamma S \cup a\Gamma S\Gamma a\Gamma S) && ,\text{Lemma 2.8} \\ &\subseteq (S\Gamma a)\Gamma(a\Gamma S) && ,\text{definisisemigrup-}\Gamma \\ &\subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S. \end{aligned}$$

Diperoleh $a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka S merupakan semigrup- Γ intra-regular. ■

Teorema 2.12 [3] Diberikan S adalah semigrup- Γ , maka:

- 1) S merupakan semigrup- Γ intra-regular jika dan hanya jika untuk setiap ideal kiri L dan bi-ideal B dari S , sedemikian hingga $L \cap B \subseteq L\Gamma B\Gamma S$.
- 2) S merupakan semigrup- Γ intra-regular jika dan hanya jika untuk setiap ideal kanan R dan bi-ideal B dari S , sedemikian hingga $B \cap R \subseteq S\Gamma B\Gamma R$.

Bukti :

- 1) Diberikan semigrup- ΓS .

\Rightarrow Diketahui S merupakan semigrup- Γ intra-regular. Diberikansebarang B adalah bi-ideal dari S dan L adalah ideal kiri dari S .

Ditunjukkan $L \cap B \subseteq L\Gamma B\Gamma S$. Diambilsebarang $a \in L \cap B$. Dari yang diketahui S merupakan semigrup- Γ intra-regular, maka $a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuk setiap $x, y \in S, \gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

$$\begin{aligned} a &= x\gamma a\gamma' a\gamma'' y \\ &= (x\gamma a)\gamma' a\gamma'' y \in L\Gamma B\Gamma S \end{aligned}$$

Diperoleh $L \cap B \subseteq L\Gamma B\Gamma S$.

\Leftarrow Diketahui $L \cap B \subseteq L\Gamma B\Gamma S$ untuk setiap B bi-ideal dari S dan L ideal kiri dari S . Dibuktikan S merupakan semigrup- Γ intra-regular.

Diambilsebarang $a \in S$. Ditunjukkana $a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, untuk setiap $a \in S$.

$$\begin{aligned}
a &\in L(a) \cap B(a) \\
&\subseteq L(a)\Gamma B(a)\Gamma S && ,S \text{ intra-regular} \\
&= (a \cup S\Gamma a)\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S && ,\text{Teorema 2.9} \\
&\subseteq (a \cup S\Gamma a)\Gamma(a\Gamma S \cup a\Gamma a\Gamma S \cup a\Gamma S\Gamma a\Gamma S) && ,\text{Lemma 2.8} \\
&\subseteq (a \cup S\Gamma a)\Gamma(a\Gamma S) && ,\text{definisi semigrup-}\Gamma \\
&\subseteq a\Gamma a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma a\Gamma S
\end{aligned}$$

Jika $a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka a merupakan elemen intra-regular. Jika $a \in a\Gamma a\Gamma S$, maka $a = a\gamma a\gamma'x$, untuk setiap $x \in S, \gamma, \gamma' \in \Gamma$.

$$\begin{aligned}
a &= a\gamma a\gamma'x \\
&= a\gamma(a\gamma a\gamma'x)\gamma'x \\
&= a\gamma(a\gamma a)\gamma'x\gamma'x \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S
\end{aligned}$$

Diperoleh $a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka S merupakan semigrup- Γ intra-regular.

2) Diberikan semigrup- Γ S .

\Rightarrow Diketahui S merupakan semigrup- Γ intra-regular. Diberikansebarang B adalah bi-ideal dari S dan R adalah ideal kanan dari S .

Ditunjukkan $B \cap R \subseteq S\Gamma B\Gamma R$. Diambilsebarang $a \in R \cap B$. Dari yang diketahui S merupakan semigrup- Γ intra-regular, maka $a = x\gamma a\gamma' a\gamma''y$, untuk setiap $x, y \in S, \gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

$$\begin{aligned}
a &= x\gamma a\gamma' a\gamma''y \\
&= x\gamma a\gamma'(a\gamma''y) \in S\Gamma B\Gamma R
\end{aligned}$$

Diperoleh $B \cap R \subseteq S\Gamma B\Gamma R$.

\Leftarrow Diketahui $B \cap R \subseteq S\Gamma B\Gamma R$ untuk setiap B bi-ideal dari S dan R ideal kanan dari S . Dibuktikan S merupakan semigrup- Γ intra-regular.

Diambilsebarang $a \in S$. Ditunjukkan $a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, untuk setiap $a \in S$.

$$\begin{aligned}
a &\in B(a) \cap R(a) \\
&\subseteq S\Gamma B(a)\Gamma R(a) && ,S \text{ intra-regular} \\
&= S\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma(a \cup S\Gamma a) && ,\text{Teorema 2.9} \\
&\subseteq (S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S\Gamma a)\Gamma(a \cup S\Gamma a) && ,\text{Lemma 2.8} \\
&\subseteq (S\Gamma a)\Gamma(a \cup a\Gamma S) && ,\text{definisi semigrup-}\Gamma
\end{aligned}$$

$$\subseteq S\Gamma a\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma a\Gamma S.$$

Jika $a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka a merupakan elemen intra-regular. Jika $a \in S\Gamma a\Gamma a$, maka $a = x\gamma a\gamma' a$, untuk setiap $x \in S, \gamma, \gamma' \in \Gamma$.

$$\begin{aligned} a &= x\gamma a\gamma' a \\ &= x\gamma(x\gamma a\gamma' a)\gamma' a \\ &= x\gamma x\gamma(a\gamma' a)\gamma' a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S \end{aligned}$$

Diperoleh $a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka S merupakan semigrup- Γ intra-regular. ■

Dengan menggunakan Teorema 2.12 dan 2.13, diperoleh.

Akibat 2.13 [3] Diberikan semigrup- Γ S , maka pernyataan berikut ekuivalen:

- (i) S intra-regular.
- (ii) $B(a) \cap Q(a) \subseteq S\Gamma B(a)\Gamma Q(a)\Gamma S$.
- (iii) $B(a) \cap Q(a) \subseteq S\Gamma Q(a)\Gamma B(a)\Gamma S$.
- (iv) $L(a) \cap B(a) \subseteq L(a)\Gamma B(a)\Gamma S$.
- (v) $B(a) \cap R(a) \subseteq S\Gamma B(a)\Gamma R(a)$.

III. KESIMPULAN

Semigrup- Γ intra-regular adalah semigrup- Γ yang memuat semua elemen intra-regularnya, yaitu jika $a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuk setiap $x, y \in S$ dan $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

Semigrup- Γ intra regular memiliki keterkaitan dengan bi-ideal, quasi-ideal dan ideal kanan (kiri), antara lain.

- 1) Semigrup- Γ S bersifat intra-regular jika dan hanya jika irisan antara bi-ideal B dan quasi-ideal Q dari S termuat di dalam $S\Gamma B\Gamma Q\Gamma S$ atau $S\Gamma Q\Gamma B\Gamma S$.
- 2) Semigrup- Γ S bersifat intra-regular jika dan hanya jika irisan antara ideal kiri L dan bi-ideal B dari S termuat di dalam $L\Gamma B\Gamma S$.
- 3) Semigrup- Γ S bersifat intra-regular jika dan hanya jika irisan antara ideal kanan R dan bi-ideal B dari S termuat di dalam $S\Gamma B\Gamma R$.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Dalam kesempatan ini tidaklah berlebihan apabila penulis menghaturkan banyak terima kasih kepada yang terhormat:

1. Drs. Solichin Zaki, M.Kom selaku Ketua Jurusan Matematika FSM UNDIP,

2. Drs. YD Sumanto, M.Sc selakudosen pembimbing I, yang telah memberibimbing dan dalam menyelesaikan Tugas Akhir penulis dengan baik,
3. Dr. Sunarsih, M.Si selakudosen pembimbing II, yang turut memberibimbing dan mengarah dalam menyelesaikan Tugas Akhir penulis,
4. Dosen Jurusan Matematika yang turut banyak memberikan dukungan,
5. Keluargadanteman-teman tercinta yang selalu memberikan semangat dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat,
baik sebagai sumber informasi maupun sumber inspirasi bagi para pembaca.

V. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Angga, K.S. 2013. *Quasi-Ideal- Γ pada Semigrup- Γ Regular*. Skripsi. UNDIP. Semarang.
- [2] Braja, I. 2009. Characterizations of Regular Gamma-Semigroup Using Quazi-Ideals. *J.Math.* Vol 3. 2009. No.36. 1789-1794.
- [3] Changpas, T. 2012. On Intra-Regular Γ -Semigroups. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*. Vol. 7. No. 273-277.
- [4] Gilbert, J. and Linda, G. 1984. *Element of Modern Algebra Third Edition*. Prindle, Weber and Schmidt. Boston.
- [5] Howie, J.M. 1976. *An Introduction To Semigroup Theory*. University Of St. Andrews, Scotland.
- [6] Lipschutz, S. dan Lipson, M. 2008. *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*. Erlangga: Jakarta.
- [7] Madhusudana Rao, D. 2013. *Theory of Γ -ideals in Γ -semigroups*. Acharya Nagarjuna University, India.
- [8] S. Lajos. 1963. *A Note on Intra-regular Semigroups*, Proc. of Japan Acad. Vol 37, No 626-627.
- [9] Stephanie, D.A. 2012. *Sifat-sifat Quasi-Ideal- Γ pada Semigrup- Γ* . Skripsi. UNDIP. Semarang.
- [10] Romi, S. 2013. *Sifat-sifat Bi- Γ -Ideal pada Γ -Semigrup*. Skripsi. UNDIP. Semarang.